

拟三次 Bézier 曲线曲面的拼接技术

胡钢¹, 秦新强¹, 韩西安², 段现报¹

(1. 西安理工大学理学院, 710048, 西安; 2. 西安交通大学理学院, 710049, 西安)

摘要: 针对工程中复杂自由曲线曲面难以用单一曲线曲面来表示的问题, 研究了一种带形状参数的拟三次 Bézier(三次 Q-Bézier)曲线曲面的拼接技术. 在对三次 Q-Bézier 曲线基函数及其端点性质分析的基础上, 给出了两相邻三次 Q-Bézier 曲线间 G^1 、 G^2 和 C^1 、 C^2 拼接的充要条件, 运用张量积的方法给出了双三次 Q-Bézier 曲面的几何模型, 同时分析了两相邻双三次 Q-Bézier 曲面片间 G^1 光滑拼接的几何条件, 并通过合理地选取形状参数, 进一步简化了该曲面的 G^1 拼接条件, 给出了三次 Q-Bézier 曲线曲面光滑拼接的几何造型实例. 实例结果表明, 所提方法简单、直观、易实现, 有效地增强了三次 Q-Bézier 方法表达复杂曲线曲面的能力, 可广泛地应用于工程复杂曲线曲面的造型系统中.

关键词: 三次 Q-Bézier 曲线; 三次 Q-Bézier 曲面; 形状参数; 拼接技术

中图分类号: TP391.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)11-0046-05

Continuity Conditions for Cubic Quasi-Bézier Curves and Surfaces

HU Gang¹, QIN Xinqiang¹, HAN Xi'an², DUAN Xianbao¹

(1. School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Focusing on the fact that the engineering complex curves or surfaces can not be described by using a single curve or surface, the continuity conditions of cubic quasi-Bézier (cubic Q-Bézier) curves and surfaces with shape parameters are investigated. Following the analysis of basis functions and terminal properties, the necessary and sufficient conditions of G^1 , G^2 continuity and C^1 , C^2 continuity between two adjacent cubic Q-Bézier curves are proposed. And then, the geometric model of the cubic Q-Bézier surfaces is constructed and the condition of G^1 continuity between two adjacent cubic Q-Bézier surfaces in u and v directions is derived and simplified by choosing the control parameters properly. The modeling examples illustrate that the continuity condition of the cubic Q-Bézier curves and surfaces can be widely applied to the complex curves and surfaces modeling system.

Keywords: cubic quasi-Bézier curve; cubic quasi-Bézier surface; shape parameter; continuity condition

随着几何造型工业的快速发展, 原有的 Bézier 和 有理 Bézier 方法已难以满足曲线曲面几何造型中的各种需求, 为了进一步增强曲线的造型能力, 人们提出了一些推广的 Bézier 曲线, 如 C-Bézier 曲线^[1-2]、q-Bézier 曲线^[3]、T-Bézier 曲线^[4]、四次带参

Bézier 曲线^[5]、拟三次 Bézier(三次 Q-Bézier)曲线^[6]和 H-Bézier 曲线^[7-8]等. 其中, 拟三次 Bézier 曲线不仅是文献[5]中曲线的进一步推广, 而且具有类似 Bézier 曲线的端点性质, 以及凸包性、变差缩减性和仿射不变性等诸多几何性质, 其形状可调性也要优

于其他曲线^[1-5,7-8]. 此外,由于它是代数多项式曲线,所以其实际计算复杂度要远低于非代数多项式曲线,如C-Bézier曲线、T-Bézier 曲线及 H-Bézier 曲线等. 因此,该曲线可以在 CAD/CAM 系统中的曲线形状设计中得到很好的应用.

拟三次 Bézier 曲线的应用非常广泛,在描述曲线、曲面方面有着重要的作用. 为了进一步增强拟三次 Bézier 曲线的形状调控能力,文献[6]研究了该曲线的形状调整问题. 然而,在 CAD/CAM 中常常会遇到复杂曲线、曲面的造型问题,而复杂的曲线、曲面往往又难以用单一的曲线、曲面来表示,所以要解决的关键问题是如何实现曲线、曲面间的光滑拼接,这是它们方便、灵活应用于曲线、曲面造型的关键^[9-10]. 为此,本文基于拟三次 Bézier 曲线的基本理论,给出了该曲线 G^1 、 G^2 和 C^1 、 C^2 光滑拼接的充要条件.

1 拟三次 Bézier 曲线的定义

定义 1 给定 4 个控制顶点向量 $\mathbf{P}_i \in \mathbf{R}^n (n=2, 3; i=0, 1, 2, 3)$, 称多项式向量曲线

$$\mathbf{P}(t; \lambda, \mu) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i b_{i,3}(t), t \in [0, 1] \quad (1)$$
$$\lambda, \mu \in [-3, 1]$$

为带形状参数 λ, μ 的拟三次 Bézier 曲线, 简称为三次 Q-Bézier 曲线^[6]. 四次基函数 $b_{i,3}(t) (i=0, 1, 2, 3)$ 的定义如下

$$\left. \begin{aligned} b_{0,3}(t) &= (1-\lambda t)(1-t)^3 \\ b_{1,3}(t) &= (3+\lambda-\lambda t)t(1-t)^2 \\ b_{2,3}(t) &= (3+\mu t)t^2(1-t) \\ b_{3,3}(t) &= (1-\mu+\mu t)t^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

当 $\lambda=\mu=0$ 时, 式(1)曲线退化为传统的三次 Bézier 曲线; 当 $\lambda=\mu$ 时, 式(1)曲线退化为文献[5]中的四次带参 Bézier 曲线. 由式(1)、式(2)可推出三次 Q-Bézier 曲线具有对称性、凸包性、几何不变性、仿射不变性, 以及如下的端点性质

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(0; \lambda, \mu) &= \mathbf{P}_0; \mathbf{P}(1; \lambda, \mu) = \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}'(0; \lambda, \mu) &= (3+\lambda)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\ \mathbf{P}'(1; \lambda, \mu) &= (3+\mu)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \\ \mathbf{P}''(0; \lambda, \mu) &= 6(\mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) + 6\lambda(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1) \\ \mathbf{P}''(1; \lambda, \mu) &= 6(\mathbf{P}_3 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1) + 6\mu(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2 三次 Q-Bézier 曲线的光滑拼接

设 $\mathbf{P}(t; \lambda_1, \mu_1)$ 和 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 为由式(1)所定义

的 2 条三次 Q-Bézier 曲线, 其顶点分别为 $\mathbf{P}_0 \sim \mathbf{P}_3$ 和 $\mathbf{Q}_0 \sim \mathbf{Q}_3$.

2.1 三次 Q-Bézier 曲线的 G^1 、 C^1 拼接

定理 1 两相邻曲线 $\mathbf{P}(t; \lambda_1, \mu_1)$ 和 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 间 G^1 光滑拼接的充要条件为

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_3 = \frac{3\alpha + \alpha\mu_1}{3\alpha + \alpha\mu_1 + 3 + \lambda_2} \mathbf{P}_2 + \frac{3 + \lambda_2}{3\alpha + \alpha\mu_1 + 3 + \lambda_2} \mathbf{Q}_1 \quad (4)$$

式中: α 为大于 0 的常数.

证明 为使两相邻曲线达到 G^1 连续, 首先要求 $\mathbf{P}(t; \lambda_1, \mu_1)$ 的末端和 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 的首端位置连续 (G^0 连续), 即

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}(1; \lambda_1, \mu_1) = \mathbf{Q}(0; \lambda_2, \mu_2) = \mathbf{Q}_0 \quad (5)$$

其次, 应满足两曲线在连接处的切矢方向相同, 即

$$\mathbf{Q}'(0; \lambda_2, \mu_2) = \alpha \mathbf{P}'(1; \lambda_1, \mu_1), \alpha > 0 \quad (6)$$

最后, 根据曲线的端点性质式(3), 再结合式(5)和式(6)便可证得式(4)成立.

当 2 条三次 Q-Bézier 曲线满足式(4)时, 2 条曲线在拼接处达到 G^1 连续, 其几何意义为: 2 条三次 Q-Bézier 曲线拼接时, 控制顶点 $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_0$, 和 $\mathbf{Q}_1$ 必须共线有序排列, 该共线即为公共连接点处的公共切线. 三次 Q-Bézier 曲线的 G^1 连续, 同三次 Bézier 曲线十分类似, 且都有很强的几何直观性. 若令式(4)中的 α 取值为 1, 则有

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_3 = \frac{3 + \mu_1}{6 + \mu_1 + \lambda_2} \mathbf{P}_2 + \frac{3 + \lambda_2}{6 + \mu_1 + \lambda_2} \mathbf{Q}_1 \quad (7)$$

即 2 条曲线切矢相等, 所得式(7)即为 2 条三次 Q-Bézier 曲线 C^1 连续的充要条件. 由式(4)、式(7)可知, 除了靠近拼接点处的 2 个控制顶点对曲线 G^1 和 C^1 连续性有影响外, 2 条曲线的控制参数 μ_1, λ_2 对曲线的 G^1 和 C^1 连续性也具有灵活的调节作用.

2.2 三次 Q-Bézier 曲线的 G^2 、 C^2 拼接

$\mathbf{P}(t; \lambda_1, \mu_1)$ 和 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 在公共连接点处 G^2 光滑拼接的定义(或充要条件)^[9-10], 即两相邻曲线在公共连接点处满足的条件为: ①满足 G^1 光滑拼接条件; ②曲率 κ_2, κ_1 相等; ③副法向量的方向相同. 根据充要条件, 下面来推导 2 条三次 Q-Bézier 曲线的 G^2 、 C^2 光滑拼接的具体条件.

定理 2 $\mathbf{P}(t; \lambda_1, \mu_1)$ 和 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 间 G^2 光滑拼接的充要条件为

$$\left. \begin{aligned} Q_0 = P_3 = & \frac{3\alpha + \alpha\mu_1}{3\alpha + \alpha\mu_1 + 3 + \lambda_2} P_2 + \frac{3 + \lambda_2}{3\alpha + \alpha\mu_1 + 3 + \lambda_2} Q_1; \\ 6P_1 - 2(3\mu_1 + 6)P_2 + 6(\mu_1 + 1)P_3 = & \alpha^{-2}[6(1 + \lambda_2)Q_0 - 2(3\lambda_2 + 6)Q_1 + 6Q_2] + \\ & d(3 + \lambda_2)(Q_1 - Q_0) \\ \alpha > 0; d \text{ 为任意常数} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

证明 由条件①得

$$\left. \begin{aligned} P_3 = P(1; \lambda_1, \mu_1) = Q(0; \lambda_2, \mu_2) = Q_0 \\ Q'(0; \lambda_2, \mu_2) = \alpha P'(1; \lambda_1, \mu_1), \alpha > 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

且 $P(t)$ 在 $t=1$ 处和 $Q(t)$ 在 $t=0$ 处的副法向量分别为 $D_1 = P'(1) \times P''(1)$, $D_2 = Q'(0) \times Q''(0)$.

根据式(9)和上述条件③可知, $P'(1)$ 、 $P''(1)$ 、 $Q'(0)$ 、 $Q''(0)$ 共面, 且由式(9)可得 $P'(1) = c Q''(0) + d Q'(0)$, $c > 0$, d 为任意常数. 依据条件②可得

$$\kappa_2 = \frac{|Q'(0) \times Q''(0)|}{|Q'(0)|^3} = \frac{\alpha |P'(1) \times P''(1)|}{c \alpha^3 |P'(1)|^3} = \frac{|P'(1) \times P''(1)|}{|P'(1)|^3} = \kappa_1, c = \alpha^{-2}$$

$$P'(1) = \alpha^{-2} Q''(0) + d Q'(0), \alpha > 0 \quad (10)$$

最后, 由曲线的端点性质计算出曲线的各阶切矢并代入式(10), 再结合式(4)即可证得式(8)成立.

在满足式(7)的情况下, 两曲线要达到 C^2 连续则要求其二阶导数相等, 即 $P''(1) = Q''(0)$. 根据曲线的端点性质式(3), 并结合式(5)可得

$$\begin{aligned} Q_0 = P_3 = & \frac{3\mu_1 + 6}{3(\mu_1 - \lambda_2)} P_2 - \frac{3}{3(\mu_1 - \lambda_2)} P_1 + \\ & \frac{3}{3(\mu_1 - \lambda_2)} Q_2 - \frac{3\lambda_2 + 6}{3(\mu_1 - \lambda_2)} Q_1 \end{aligned} \quad (11)$$

由式(7)、式(11)构成了两相邻三次 Q-Bézier 曲线在拼接点处 C^2 连续的充要条件.

3 双三次 Q-Bézier 曲面的光滑拼接

3.1 双三次 Q-Bézier 曲面的创建

定义 2 若给定 4×4 个控制网格顶点阵列 $P_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ ($i, j=0, 1, 2, 3$), 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的双三次 Q-Bézier 曲面, 即与三次 Q-Bézier 曲线相对应的张量积曲面为

$$\left. \begin{aligned} P(u, v) = & \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{i,j} b_{i,3}(u; \lambda, \mu) b_{j,3}(v; \gamma, \omega) \\ 0 \leq u, v \leq 1; -3 \leq \lambda, \mu, \gamma, \omega \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中: $\lambda, \mu, \gamma, \omega$ 表示形状参数. 当所有形状参数都

为 0 时, 双三次 Q-Bézier 曲面便退化为传统的双三次 Bézier 曲面. 由式(2)所示基函数的性质, 容易验证双三次 Q-Bézier 曲面具有优良的形状可调性, 可灵活实现 80 种逼近方式. 图 1 给出了形状参数逐渐减小时曲面的变化情况.

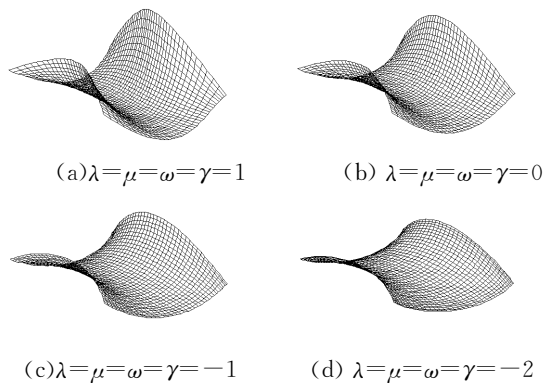


图 1 形状参数的几何意义

3.2 双三次 Q-Bézier 曲面的光滑拼接

在实际工程应用中, 曲面片间通常要达到 G^1 连续, 即曲面在公共连接线处有公共的切平面或公共的曲面法线^[9-10]. 设有 2 张双三次 Q-Bézier 曲面片 $P(u, v; \lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1)$ 和 $Q(u, v; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2)$, 其控制网格顶点向量分别为 $p_{i,j}$ 和 $q_{i,j}$ ($i, j=0, 1, 2, 3$). 由于双三次 Q-Bézier 曲面存在方向性, 因而 2 张曲面片间的拼接存在以下 3 种形式.

3.2.1 u 向与 u 向拼接 2 张曲面片要达到 G^1 连续, 首先要求它们有一个公共边界, 即

$$\sum_{i=0}^3 b_{i,3}(u; \lambda_1, \mu_1) p_{i,3} = \sum_{i=0}^3 b_{i,3}(u; \lambda_2, \mu_2) q_{i,0} \quad (13)$$

对比式(13)中两边多项式曲线的各幂项系数, 可将式(13)进一步整理为

$$\left. \begin{aligned} p_{i,3} = q_{i,0}, i = 0, 1, 2, 3 \\ \lambda_1 = \lambda_2; \mu_1 = \mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其次, 要求 2 张双三次 Q-Bézier 曲面片在拼接边界处有公共的切平面, 即 2 张曲面片在边界上的法矢方向是连续的. 因此, 数学上应满足^[9-10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} P(u, 1; \lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1) \times \frac{\partial}{\partial u} P \\ (u, 1; \lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1) = f(v) \frac{\partial}{\partial v} Q \\ (u, 0; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2) \times \frac{\partial}{\partial u} Q \\ (u, 0; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2) \end{aligned}$$

且在实际工程应用中, 往往采用 Faux 和 Pratt 的方法^[10]将上式简化为

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{P}(u, 1; \lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1) =$$
$$f \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{Q}(u, 0; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2) \quad (15)$$

式中: f 为大于 0 的实常数. 式(15)的几何意义为两曲面拼接时跨界切矢的方向是连续的. 计算曲面片的跨界切矢,并代入式(15)得

$$(3 + \omega_1) \sum_{i=0}^3 b_{i,3}(u; \lambda_1, \mu_1)(\mathbf{p}_{i,3} - \mathbf{p}_{i,2}) =$$
$$f(3 + \gamma_2) \sum_{i=0}^3 b_{i,3}(u; \lambda_2, \mu_2)(\mathbf{q}_{i,1} - \mathbf{q}_{i,0}) \quad (16)$$

再结合式(14)中的结论可将式(16)整理为

$$\frac{\mathbf{p}_{i,3} - \mathbf{p}_{i,2}}{3 + \gamma_2} = f \frac{\mathbf{q}_{i,1} - \mathbf{q}_{i,0}}{3 + \omega_1}, i = 0, 1, 2, 3 \quad (17)$$

若 $\omega_1 = \gamma_2$, 则式(17)可进一步简化为

$$\mathbf{p}_{i,3} - \mathbf{p}_{i,2} = f(\mathbf{q}_{i,1} - \mathbf{q}_{i,0}), i = 0, 1, 2, 3 \quad (18)$$

综上所述,式(14)和式(17)构成了 2 张双三次 Q-Bézier 曲面片的 u 向与 u 向 G^1 光滑拼接的一般条件. 若满足 $\omega_1 = \gamma_2$, 则式(14)和式(18)便构成了 2 张双三次 Q-Bézier 曲面片的 u 向与 u 向 G^1 光滑拼接的充分条件. 若满足 $\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2, \omega_1 = \gamma_2$, 则 G^1 连续的两曲面片具有相同的 4 个控制顶点, 且 $\mathbf{p}_{i,2}, \mathbf{p}_{i,3}(=\mathbf{q}_{i,0}), \mathbf{q}_{i,1}$ 共线并有序排列.

3.2.2 u 向与 v 向拼接 设 $\mathbf{P}(u, v; \lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1)$ 的 u 向和 $\mathbf{Q}(u, v; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2)$ 的 v 向拼接, 则它们具有公共边界条件, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{i,3} &= \mathbf{q}_{0,j}, i = j = 0, 1, 2, 3 \\ \lambda_1 &= \gamma_2; \mu_1 = \omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其次,公共切平面条件应满足

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{P}(u, 1; \lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1) =$$
$$f \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{Q}(0, v; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2) \quad (20)$$

计算曲面片的跨界切矢,并代入式(20)得

$$(3 + \omega_1) \sum_{i=0}^3 b_{i,3}(u; \lambda_1, \mu_1)(\mathbf{p}_{i,3} - \mathbf{p}_{i,2}) =$$
$$f(3 + \lambda_2) \sum_{j=0}^3 b_{j,3}(v; \gamma_2, \omega_2)(\mathbf{q}_{1,j} - \mathbf{q}_{0,j}) \quad (21)$$

再结合式(19)中的结论,可将式(21)整理为

$$\frac{\mathbf{p}_{i,3} - \mathbf{p}_{i,2}}{3 + \lambda_2} = f \frac{\mathbf{q}_{1,j} - \mathbf{q}_{0,j}}{3 + \omega_1}, i = j = 0, 1, 2, 3$$
$$(22)$$

若令 $\omega_1 = \lambda_2$, 则式(22)可进一步简化为

$$\mathbf{p}_{i,3} - \mathbf{p}_{i,2} = f(\mathbf{q}_{1,j} - \mathbf{q}_{0,j}), i = j = 0, 1, 2, 3$$
$$(23)$$

由此可得,式(19)和式(22)构成了 2 张双三次

Q-Bézier 曲面片的 u 向与 v 向 G^1 光滑拼接的一般条件. 若满足 $\omega_1 = \lambda_2$, 则式(19)和式(23)便构成了 2 张双三次 Q-Bézier 曲面片的 u 向与 v 向 G^1 光滑拼接的一个充分条件. 其几何意义为:若满足 $\lambda_1 = \gamma_2, \mu_1 = \omega_2, \omega_1 = \lambda_2$, 则 G^1 光滑拼接的两曲面片有相同的 4 个控制顶点, 且 $\mathbf{p}_{i,2}, \mathbf{p}_{i,3}(=\mathbf{q}_{0,j}), \mathbf{q}_{1,j}$ 共线并有序排列.

3.2.3 v 向与 v 向拼接 同 u 向与 u 向 G^1 光滑拼接类似,对于两相邻三次 Q-Bézier 曲面片 v 向与 v 向的 G^1 光滑拼接,同理可得到如下的结论.

定理 3 若 $\mathbf{P}(u, v; \lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1)$ 和 $\mathbf{Q}(u, v; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2)$ 满足如下条件

$$\gamma_1 = \gamma_2, \omega_1 = \omega_2; \mathbf{p}_{3,j} = \mathbf{q}_{0,j}, j = 0, 1, 2, 3$$
$$\frac{\mathbf{p}_{3,j} - \mathbf{p}_{2,j}}{3 + \lambda_2} = f \frac{\mathbf{q}_{1,j} - \mathbf{q}_{0,j}}{3 + \mu_1}, j = 0, 1, 2, 3$$
$$f > 0$$

并同时成立, 则 $\mathbf{P}(u, v)$ 和 $\mathbf{Q}(u, v)$ 在公共边界处达到 v 向与 v 向的 G^1 光滑拼接.

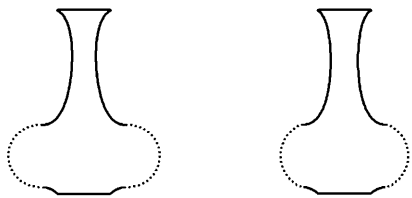
4 拼接步骤与实例

4.1 曲线光滑拼接步骤与实例

利用三次 Q-Bézier 曲线间的拼接技术以及优良 的形状可调性和逼近性,可方便地设计和修改各种造型复杂的自由曲线. 根据定理 1 中的结论可知,实现 2 条三次 Q-Bézier 曲线 $\mathbf{P}(t; \lambda_1, \mu_1)$ 和 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 间 G^1 光滑拼接的基本步骤为:①给定 $\mathbf{P}(t; \lambda_1, \mu_1)$ 的控制顶点 $\mathbf{P}_0 \sim \mathbf{P}_3$ 以及参数 λ_1, μ_1 ;②令 $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_3$, 使得 $\mathbf{P}(t; \lambda_1, \mu_1)$ 和 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 达到位置连续;③根据式(4)计算出 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 的控制顶点 $\mathbf{Q}_1$ 和参数 λ_2 ;④自由给定 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 的控制顶点 $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ 和形状参数 μ_2 , 即可实现两曲线间的 G^1 光滑拼接. 同理,由定理 2 中的结论可知,实现 2 条三次 Q-Bézier 曲线 $\mathbf{P}(t; \lambda_1, \mu_1)$ 和 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 间 G^2 光滑拼接的基本步骤为:①按照 G^1 光滑拼接基本步骤中的步骤①~步骤③进行预处理,计算出 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 的控制顶点 $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$ 和参数 λ_2 ;②根据式(8)中的第 2 个等式计算出 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 的控制顶点 $\mathbf{Q}_2$;③自由给定 $\mathbf{Q}(t; \lambda_2, \mu_2)$ 的控制顶点 $\mathbf{Q}_3$ 和 μ_2 , 即可实现两曲线的 G^2 光滑拼接.

图 2 是利用三次 Q-Bézier 曲线拼接技术生成的花瓶曲线图形. 其中,图 2 中花瓶的左右两边曲线都是由 3 条三次 Q-Bézier 曲线段(用实线、虚线区分)以 G^1 光滑拼接而成. 从上述拼接步骤和应用实例中可以看出,对于拼接后的曲线还可以通过修

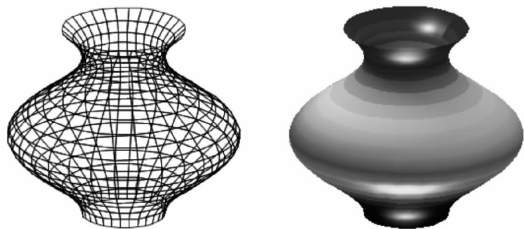
改形状参数来灵活改变拼接曲线的局部形状,且不影响曲线拼接的光滑程度。



(a) 拼接生成的花瓶 (b) 修改参数后的花瓶

图2 花瓶图形设计实例

结合拼接技术,利用三次 Q-Bézier 方法还可以构造工程中常见的造型曲面,如旋转曲面、平移曲面、直纹曲面和扫掠曲面等。如图3所示的旋转花瓶曲面造型实例,其中花瓶曲面的母线是由3条三次 Q-Bézier 曲线以 G^1 光滑拼接而成。



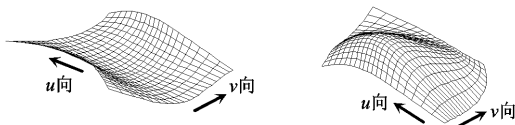
(a) 网格模型 (b) 光照模型

图3 旋转花瓶曲面的模型

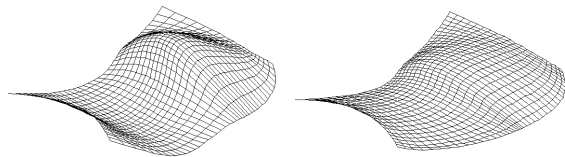
4.2 曲面光滑拼接步骤与实例

以 u 向与 u 向拼接为例,根据 3.2 节中的结论可知,实现 2 张双三次 Q-Bézier 曲面片 u 向与 u 向 G^1 光滑拼接的基本步骤为:①给定初始 $P(u, v; \lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1)$ 的控制网格顶点 $p_{i,j} (i, j=0, 1, 2, 3)$ 以及参数 $\lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1$; ②令 $p_{i,3} = q_{i,0}, i=0, 1, 2, 3, \lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2$, 使得 $P(u, v; \lambda_1, \mu_1, \gamma_1, \omega_1)$ 和 $Q(u, v; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2)$ 具有一条公共边界; ③根据式(17)计算出 $Q(u, v; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2)$ 的一排控制网格顶点 $q_{0,1}, q_{1,1}, q_{2,1}, q_{3,1}$ 和 γ_2 ; ④自由给定 $Q(u, v; \lambda_2, \mu_2, \gamma_2, \omega_2)$ 的两排控制网格顶点 $q_{i,2}, q_{i,3}, i=0, 1, 2, 3$ 和 ω_2 , 即可实现 2 张曲面片间的 G^1 光滑拼接。

图4给出了2张双三次 Q-Bézier 曲面片 u 向与 u 向 G^1 光滑拼接的实例。其中,图4a中2张曲面片的控制网格顶点和形状参数是按式(14)和式(17)中的条件来取值的,而图4c与图4b中的曲面具有相同的控制网格顶点。从拼接结果来看,2张曲面片在公共边界处具有公共的切平面,且光滑拼接的效果较好。此外,在实际工程应用中还可根据需要进行形状参数,来灵活调整拼接后曲面的形状,同时也不会影响曲面拼接的光滑程度。



(a) 拼接前的 2 张曲面片



(b) 拼接后的光滑曲面 (c) 修改参数后的光滑曲面

图4 双三次 Q-Bézier 曲面的 G^1 拼接

图5给出了一个鱼形曲面造型的实例,其中整个鱼形曲面是由2张双三次 Q-Bézier 曲面片(采用实网格和虚网格曲面区分)以 G^1 光滑拼接而成。从图5中可以看出,2张曲面在公共边界处过渡自然、光滑,达到了较好的拼接效果。

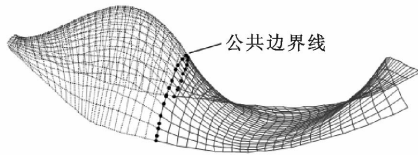


图5 鱼形曲面造型实例

5 结束语

本文为了解决三次 Q-Bézier 曲线曲面造型中复杂曲线曲面的构造问题,给出了三次 Q-Bézier 曲线 G^1, C^1 和 G^2, C^2 光滑拼接的条件,同时还给出了双三次 Q-Bézier 曲面间 G^1 光滑拼接的条件。理论分析和造型实例表明,三次 Q-Bézier 曲线曲面不仅具有更好的逼近性和更灵活的逼近方式,而且其拼接条件也具有简单、直观的特点,可以用来生成多种不同的常用复杂曲线曲面,因而在工程曲线曲面构造中有着广泛的应用前景。

参考文献:

- [1] ZHANG Jiwen. C-curves and surfaces [J]. Graphical Models and Image Processing, 1999, 61(1): 2-15.
- [2] 樊建华, 张纪文, 郭义杰. C-Bézier 曲线的形状修改 [J]. 软件学报, 2002, 13(11): 2194-2200.
FAN Jianhua, ZHANG Jiwen, WU Yijie. Shape modification of C-Bézier curves [J]. Journal of Software, 2002, 13(11): 2194-2200.
- [3] ORUC H. PHILLIPS G H. q-Bernstein polynomials and Bézier curves [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(1): 1-12.
- [4] 丁敏, 汪国昭. 基于三角和代数多项式的 T-Bézier 曲

- 线 [J]. 计算机学报, 2004, 27(8): 1021-1026.
- DIN Min, WANG Guozhao. T-Bézier curves based on algebraic and trigonometric polynomials [J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(8): 1021-1026.
- [5] 吴晓勤, 韩旭里. 三次 Bézier 曲线的扩展 [J]. 工程图学学报, 2005, 26(6): 98-102.
- WU Xiaoqin, HAN Xuli. Extension of cubic Bézier curve [J]. Journal of Engineering Graphics, 2005, 26(6): 98-102.
- [6] 韩西安, 马逸尘, 黄希利. 拟三次 Bézier 曲线的形状调整 [J]. 西安交通大学学报, 2007, 41(8): 903-906.
- HAN Xi'an, MA Yichen, HUANG Xili. Shape modification of cubic quasi-Bézier curve [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, 41(8): 903-906.
- [7] WANG Guozhao, YANG Qinmin. Planar cubic hybrid hyperbolic polynomial curve and its shape classification [J]. Progress in Natural Science, 2004, 14(1): 41-46.
- [8] 檀结庆, 王燕, 李志明. 三次 H-Bézier 曲线的分割、拼接及其应用 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(5): 584-588.
- TAN Jieqing, WANG Yan, LI Zhiming. Subdivision algorithm, connection and applications of cubic H-Bézier curves [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(5): 584-588.
- [9] 李鹏, 李原, 刘平, 等. C-B 样条曲线及曲面的光滑拼接与应用 [J]. 西北工业大学学报, 2007, 25(6): 890-895.
- LI Peng, LI Yuan, LIU Ping, et al. On continuity conditions for C-B-Spline curves and surfaces [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2007, 25(6): 890-895.
- [10] FARIN G. Curves and surfaces for CAGD: a practical guide [M]. 5th ed. San Diego, USA: Academic Press, 2002: 368-376.

(编辑 管咏梅)